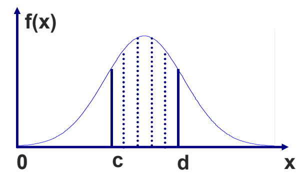
İSTATİSTİK I

Ders 11

Rassal Değişkenler ve Dağılımları-II

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım 5.3.1: X, şekil 5.3.1 de gösterilen ($-\infty, \infty$) aralığında tanımlanan sürekli rasgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f(x) fonksiyonuna X rasgele değişkeninin **olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir.



$$1.\ f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$2.\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

(f(x) eğrisi altında kalan ve x-ekseni ile sınırlanan alan 1'e eşittir.)

2

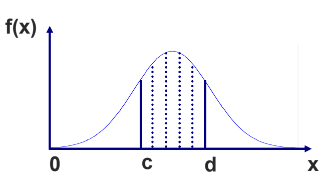
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$P(c < X < d) = \int_c^d f(x)dx$ $f(x)$ eğrisi,

x-ekseni ve x=c, x=d doğruları ile sınırlı alandır.

$$P(c < X < d) = P(c \leq X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X \leq d)$$

olduğuna dikkat etmeliyiz.



Sürekli X rasgele değişkeninin belli bir x değeri alması olasılığı sıfırdır.

P(X=x)=0

3

Örnek

Örnek 5.3.1: f(x)=1, 0<x<1 olasılık yoğunluk fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

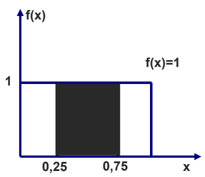
a) P(0,25<X<0,75)

b) P(X>0,25)

4

Çözüm

x=0, x=1 doğruları, f(x)=1 doğrusu ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı 1'dir.



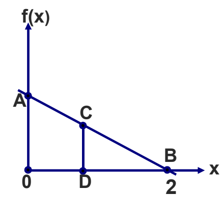
a) P(0,25<X<0,75)=1. (0,50)=0,5
(uzunluğu 1, genişliği 0,50 olan dikdörtgenin alanıdır.)

b) P(X>0,25)=1.(0,75)=0,75
(uzunluğu 1, genişliği 0,75 olan dikdörtgenin alanıdır.)

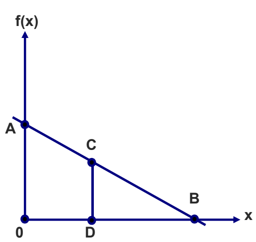
Örnek

Örnek 5.3.2: X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu, f(x)=1-x/2, 0<x<2 aşağıdaki şekilde verilmiştir.

a) P(0<X<1)
b) P(1<X<2) olasılıklarını bulunuz.



Çözüm



a) P(0<X<1) = OACD yamuğunun alanı
= 1/2 (OA+CD).OD
= 1/2 (1,0+0,5).(1,0)=0,75

b) P(1<X<2) = DCB üçgeninin alanı
= 1/2 (DB).CD
= 1/2 (1).(0,5)
= 0,25

Örnek

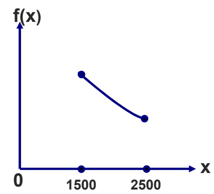
Örnek 5.3.3: Belli bir tipteki elektrik ampullerinin dayanma süresi (saat olarak) X olsun. X sürekli bir rasgele değişken olmak üzere X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. a'yı bulunuz.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x^3}, & 1500 \le x \le 2500 \\ 0, & x<1500 \ veya \ x>2500 \end{cases}$$

Çözüm

A={x<1500} ve B={x>2500} olaylarına sıfır olasılıkları karşılık gelecektir. a'yı hesaplamak için aşağıdaki eşitlik kullanılırsa a=7031250 bulunur.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^3} dx = 1$$



Sürekli Rasgele Değişkenin Dağılım Fonksiyonu

Tanım 5.3.2: (Dağılım Fonksiyonu) X, f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişken olsun. X'in dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Örnek

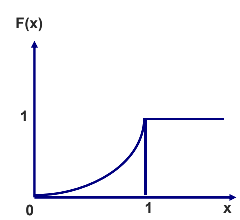
Örnek 5.3.4: X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Birikimli dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{aralığın dışında} \end{cases}$$

Çözüm

Çözüm:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \ \text{ ise} \\ \int_0^x 2s.ds = x^2 & 0<x<1 \ \text{ ise} \\ 1 & x \geq 1 \ \text{ ise} \end{cases}$$



Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

Teorem 5.3.1:

a) F azalmayan bir fonksiyondur.
Yani, $x_1<x_2$ ise $F(x_1)\le F(x_2)$ dir.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ ve $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$

(*Genellikle* F(-∞)=0 ve F(+∞)=1 yazılır.)

Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

İspat:

a) A ve B olaylarını şöyle tanımlayalım:
$A=\{X\le x_1\}$, $B=\{X\le x_2\}$. O halde, $x_1<x_2$ olduğundan $A\subset B$ yazılır. Teorem 4.2.1'den $P(A)\le P(B)$ dir.

$$P(A)=P(X\le x_1)=F(x_1)$$
$$P(B)=P(X\le x_2)=F(x_2)$$

yazılabileceğinden $F(x_1)\le F(x_2)$ bulunur.

Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

İspat:

b) Sürekli halde:

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} f(s).ds=0$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f(s).ds=1$$

dir. Kesikli halde ispat buradakine benzer.

Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

Teorem 5.3.2:

a) Sürekli X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olsun. Bu takdirde bütün x değerlerinde türevi tanımlı bir F fonksiyonu için

$$f(x)=\frac{d}{dx}(F(x))$$

ve $a\le b$ olmak üzere herhangi a ve b gerçel sayıları için

$$P(a\le X\le b)=F(b)-F(a)\ \text{dır.}$$

Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

Teorem 5.3.2:

b) X, $x_1<x_2<\ldots$ gibi sıralı x_1, x_2, … değerlerini alabilen kesikli rasgele değişken olsun.

F(x), X'in dağılım fonksiyonu ise bu takdirde

$f(x_1)=F(x_1)$ ve $f(x_i)=P(X=x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$ dir.

Örnek

Örnek 5.3.5:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{1}{3} & 1\le x<4 \\ \frac{1}{2} & 4\le x<6 \\ \frac{5}{6} & 6\le x<10 \\ 1 & x\ge 10 \end{cases}$$

a) Dağılım fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

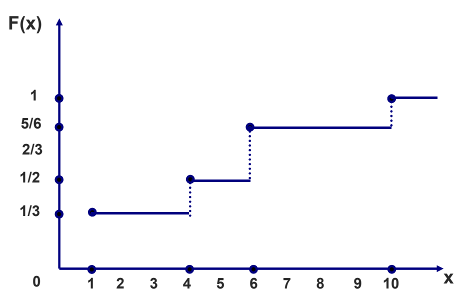
b) P(2<X≤6)

c) P(x=4) olasılıklarını bulunuz.

d) X'in olasılık fonksiyonunu yazınız.

Çözüm

a)



Çözüm

b) P(2 < X ≤ 6) = P(X ≤ 6) - P(X ≤ 1)

$$=F(6)-F(1)=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

c) f(4)=P(X=4)=F(4)-F(3)=1/2-1/3=1/6

d)

	1	4	6	10
f(x)	1/3	1/6	1/3	1/6

Örnek

Örnek 5.3.6: Sürekli bir X rasgele değişkeni için yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. X'in dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \text{ için} \\ 2-x & 1\le x\le 2 \text{ için} \\ 0 & \text{başka yerde} \end{cases}$$

Çözüm

Çözüm: Dağılım fonksiyonunu aşağıdaki şekilde gösteririz.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \text{ için} \\ \dfrac{x^2}{2} & 0<x<1 \text{ için} \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2 \text{ için} \\ 1 & x\ge 2 \text{ için} \end{cases}$$

Çözüm

F(x)'in elde edilişi:

$$\int_0^x f(t).dt=\int_0^x t.dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^x=\frac{x^2}{2} \qquad 0<x<1 \text{ için}$$

$$\int_0^1 x.dx=\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\int_1^x (2-t).dt=\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x=\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=2x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2} \text{ olduğundan}$$

$$\int_1^x x.dx=\frac{1}{2} \text{ in eklenmesiyle } 1\le x<2 \text{ için}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}=2x-\frac{x^2}{2}-1 \quad \text{olacaktır.}$$